

Informationsteori og musikalsk analyse

Af JENS BRINCKER

Siden *C. E. Shannon*¹ og *Norbert Wiener*² i 1948 publicerede de første grundlæggende arbejder om den statistiske behandling af kommunikationsprocesser, har kommunikationsteorien eller informationsteorien³ været genstand for indgående studier og har fundet anvendelse på et usædvanligt stort antal forskningsområder. Denne intensive anvendelse af en matematisk teori på felter, der ikke blot kan være væsentligt forskellige fra det oprindelige udgangspunkt, men tilmed ofte har været anset som utilgængelige for matematisk behandling, er blevet mødt med højst forskellige reaktioner, der såvel omfatter den begejstrede åbenhed som den hårdnakkede skepsis.

Mulighederne for at bedømme de talrige forsøg, der er gjort på at anvende informationsteoretiske begreber og metoder på musikalske problemstillinger, og de mere eller mindre polemiske indlæg, disse forsøg har affødt, er overordentligt begrænsede, da en stor del af materialet foreligger som yderst koncentrerede, svært tilgængelige beretninger og diskussionsbidrag i periodica, kongresreferater, symposier ect. spredt over så forskelligartede fagområder som musikvidenskab, elektronik, kommunikationsteknik m. m.

Det forekommer derfor mere nærliggende at bidrage til belysningen af informationsteoriens musikalske relevans gennem en selvstændig vurdering end ved litteraturundersøgelser, hvorfor der i det følgende skal beskrives en analysemetode, som demonstreres på et musikalsk materiale. Som baggrund for denne tjener i højere grad informationsteoriens eksakte, matematiske formulering end eksisterende undersøgelser over sammenhængen mellem informationsteori og

1. C. E. Shannon, »A Mathematical Theory of Communication«. The Bell System Technical Journal xxviii, pg. 379–424 og 623–657.
2. Norbert Wiener, »Cybernetics«. Cambridge, Mass. 1948.
3. Skønt Shannon oprindeligt kaldte sin teori »kommunikationsteori« (jfr. note 1), har betegnelsen »informationsteori« vundet indpas sideløbende med den originale. Da der – specielt i tysksproget litteratur – er en tendens til at foretrække »kommunikationsteori« i forbindelse med kommunikationsprocesser og anvende »informationsteori«, hvor kommunikationsteorien anvendes på områder uden direkte eller primær forbindelse med kommunikation: litteratur, psykologi, musik etc., vil der i det følgende blive talt om »informationsteori«.

musik. Derfor anses det for rimeligt at tage udgangspunkt i en omtale af de dele af teorien, der danner den direkte forudsætning for analysemetoden.

Det er grundlæggende for informationsteoriens anvendelse på musikalske fænomener, at et musikstykke opfattes som en meddelelse fra en komponist til en mulig lytter. Den derved antydede kommunikationsproces foregår ideelt set således, at komponisten ud af et fastlagt repertoire vælger et antal symboler (kompositionens toner), der igennem en kanal overføres til lytteren. Mens en væsentlig del af de gængse informationsteoretiske undersøgelser omhandler kanalen og dens fysiske egenskaber, dens kapacitet etc., vil der i denne sammenhæng blive set bort fra en undersøgelse af kanalen, der blandt andet omfatter den klanglige reproduktion af musikstykket og lytterens individuelt farvede opfattelse af det spillede. I stedet vil opmærksomheden koncentreres om selve den musikalske meddelelse, der karakteriseres af den frihed, hvormed komponisten vælger sine symboler. Når undtages ekstreme musikalske stilarter, som mig bekendt kun har egentlig betydning for de sidste tyve års musik, er komponisternes valg hverken determinerede eller arbitrære, men underkastet en række lovmæssigheder af statistisk art, hvilket gør det muligt at forudsige udfaldet af et valg med en sandsynlighed mellem 1 og 0.

Summen af alle de lovmæssigheder, som influerer komponistens valg, udgør kompositionens stil, der erkendes som en karakteristisk sandsynlighed for at bestemte skalatrin, samklange, melodiformer etc. forekommer i kompositionen. I nodebilledet konstateres disse stiltræk som de forskellige hyppigheder, hvormed kompositionens enkelttoner, samklange og tonefølger optræder, hvilket har resulteret i en mere eller mindre udtalt benyttelse af statistiske kriterier i musikalske stilanalyser.

Set under denne synsvinkel er den informationsteoretiske analyse af musikværker blot en videreførelse af den klassiske stilanalyse, men med benyttelse af de statistiske hjælpemidler, der er blevet udviklet i dette århundrede, nemlig sandsynlighedsregningen og den deraf afledte statistiske kommunikationsteori. Sammenhængen mellem sandsynlighedsregningen og det almindelige, statistisk begrundede skøn vil fremgå af følgende eksempel:

Forestiller man sig en enstemmig komposition, der er 100 toner lang og indeholder 8 forskellige toner: c, d, e, f, g, a, h, cl, hvoraf g forekommer 22 gange, siger man, at sandsynligheden, hvormed tonen g optræder i kompositionen, er 22/100 eller 0,22.

$$p(g) = 0,22^4.$$

Den betragtede komposition på 100 toner vil indeholde 99 tonepar, hvoraf 22 vil indeholde tonen g som begyndelsestone (idet det forudsættes, at komposi-

4. Sandsynligheden af en hændelse, x, skrives almindeligvis som »p(x)«, hvor funktionstegnet »p« er en forkortelse af »possibility«. Jfr. Fazlollah M. Reza, »An Introduction to Information Theory«, New York 1961 (i det følgende citeret som RezaI), kapitel 2.

tionen ikke har g som sidste tone). Blandt disse 22 tonepar forekommer tonerne g-f måske 11 gange, hvorfor sandsynligheden for at f efterfølger g bliver $11/22$ eller 0,50,

$$p_g(f) = 0,50,$$

mens sandsynligheden for at toneparret g-f forekommer bliver $11/99$ eller 0,11,

$$p(g, f) = 0,11.$$

Disse sandsynligheder kan nemt udvides til at omfatte tonefølger på 3, 4 eller flere toner efter behov, ligesom man ser, at ovenstående eksempel, der behandler hyppigheden af successive toner, uden videre kan udstrækkes til at omfatte flerstemmighed, hvor vi så blot vil tale om karakteristiske samklange eller akkorder i stedet for tonefølger.

De her skitserede grundbegreber for sandsynlighedsregningen er grundlæggende for informationsteorien, idet sandsynligheden af en hændelse er bestemmende for hændelsens informationsindhold. Groft taget kan man sige, at en hændelses informationsindhold kun afhænger af den sandsynlighed, hvormed hændelsen kan forudsiges ⁵. Denne anvendelse af ordet information adskiller sig på væsentlige punkter fra den gængse, idet man i almindelig sprogbrug ofte forbinder »information« med »viden«, hvorimod begrebet i den specielle informationsteoretiske anvendelse refererer til usikkerhed og til usikkerhedens afløsning af vished. Klarest kommer denne forskel mellem den almene og specielle sprogbrug for dagen, når man holder sig for øje, at »information« i daglig tale rummer et semantisk aspekt, som informationsteorien ganske mangler.

Informationsindholdet af en hændelse er det kvantitative udtryk for den usikkerhed, hvormed hændelsen kan forudsiges. Den sikre hændelse med sandsynligheden $p=1$ kan forudsiges uden usikkerhed, hvorfor dens informationsindhold $I=0$. Den umulige hændelse med sandsynligheden $p=0$ kan ikke forudsiges, det vil sige, at usikkerheden er maksimal og informationsindholdet uendeligt stort (egentlig: ikke defineret). Enhver anden hændelse kan forudsiges med en usikkerhed, der er omvendt proportional til hændelsens sandsynlighed, og har dermed et informationsindhold, der er større end 0 og afhængig af usikkerheden.

Ud fra de her skitserede betingelser for begrebet »informationsindholdet af en hændelse« samt visse tillægsbetingelser af mere formel-logisk art er det muligt at opbygge den matematiske informationsteori axiomatisk ⁶, hvorved man kommer til følgende udtryk for informationsindholdet $I(x)$ af en hændelse x , der ganske stemmer overens med det udtryk, som Shannon ⁷ fandt på mere intuitiv måde.

5. For en nøjere belysning af begrebet »information« se: J. R. Pierce, »Symbols, Signals and Noise«, New York 1961 kapitlerne 2 og 5.

6. Jfr. A. Feinstein: »Foundations of Information Theory«, New York 1958.

7. Op. cit.

Informationsindholdet af en hændelse x er den negative totalslogaritme til hændelsens sandsynlighed $p(x)$ eller

$$I(x) = -\log_2 p(x).$$

Ovenstående definition af informationsindholdet af en hændelse gælder enhver mulig hændelse med sandsynligheden større end 0 og mindre eller lig med 1, idet man – når definitionen anvendes på flere mulige hændelser – taler om hver enkelt hændelses selvinformation. I det tilfælde, hvor hændelserne i en mængde tilsammen udtømmer alle muligheder, hvilket udtrykkes ved, at summen af deres sandsynligheder bliver 1,

$$\sum_i p_i = 1,$$

betrakter man hændelsesmængden som informationskilde, hvori de enkelte hændelser indgår som symboler. De ovenfor definerede selvinformationer karakteriserer nu de enkelte symboler, hvorimod kilden karakteriseres af summen af selvinformationerne under hensyn til den hyppighed, hvormed hvert enkelt symbol optræder. Det derved fremkomne tal, der er et »vejset gennemsnit« eller en »middelværdi«, kaldes kildens information eller kildens entropi ⁸, H .

Kilden X med symbolerne $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_n$.

der opfylder betingelsen: $\sum_i p(x_i) = 1$

har informationen: $H(X) = -\sum_{i=1}^n p(x_i) \cdot \log_2 p(x_i)$ pr. symbol.

Det fremgår af udtrykket for H , som er en sum, at H må afhænge af antallet af led i summen efter princippet jo flere led des større sum. Dertil kommer, at H også afhænger af den tilfældighed, hvormed de enkelte symboler optræder, idet en kilde med et fastlagt antal symboler vil have størst mulig information, når alle symboler er lige sandsynlige, hvorimod kildens information vil synke mod 0, hvis et symbol bliver overvejende sandsynligt, mens de øvrige bliver meget sjældne ⁹.

Det er karakteristisk for alle »naturlige« informationskilder som tale- og skriftsprog, musik etc., at de indeholder væsentlig mindre information end den

8. Det er forfatteren bekendt endnu ikke lykkedes at finde frem til en international standardisering af informationsteoriens vokabular, hvilket bl. a. har til følge, at $H(X)$ kaldes kildens information, middelinformation, entropi, coentropi eller informationelle entropi. Da entropibegrebet er nøje forbundet med termodynamikken, mens navnets informationsteoretiske anvendelse snarest synes begrundet i en formel lighed, skal der i denne forbindelse tales om »information«. Om anvendelsen af »entropi« se J. R. Pierce: »Symbols, Signals and Noise«, New York 1961 kapitel 5.

9. Jfr. RezaI pg. 90f.

maksimalle mængde, der fordrer, at alle symboler er lige sandsynlige. Således vil det være bekendt, at bogstavet »e« er påfaldende hyppigt i alle vesteuropæiske sprog, mens bogstaverne »x« og »z« oftere forekommer i østeuropæiske sprog end i vesteuropæiske. Forholdet mellem en kildes maksimale information, $H_{\max}$, og dens reale information, H , udtrykkes i kildens redundans eller dens overbestemthed, R .

$$R = 1 - H/H_{\max}.$$

Betydningen af dette begreb, overbestemtheden, vil fremgå nærmere af den sammenhæng, der er mellem en kildes maksimale information og antallet af dens symboler. Betingelsen for maksimal information er – som ovenfor nævnt – at alle symboler er lige sandsynlige. Da summen af alle sandsynligheder skal være 1, må sandsynligheden af det enkelte symbol være den reciprokke værdi af antallet af symboler i kilden. For eksempel vil en kilde med 2 symboler og maksimal information have symbolsandsynlighederne $1/2$ og $1/2$. Kildens information vil i dette tilfælde være:

$$H = 1/2 \cdot -\log_2 1/2 + 1/2 \cdot -\log_2 1/2 = -\log_2 1/2$$

$$H = 1 \text{ bit}^{10}$$

Takket være den logaritmiske sammenhæng mellem informationen og antallet af lige sandsynlige symboler i en kilde er man i stand til at angive det mindste antal symboler, der kan befordre en given informationsmængde, idet sammenhængen mellem den logaritmiske og den eksponentielle funktion medfører, at en informationsmængde på 1 bit kan befordres af et antal symboler på mindst $2^1=2$, hvilket fremgår direkte af foranstående eksempel. Analogt hermed kan 2 bits information befordres af mindst $2^2=4$ symboler, 3 bits af mindst $2^3=8$ symboler og så fremdeles.

Når det derfor om en kilde kan fastslås, at den indeholder mindre information end maksimalt som følge af uensartet fordeling af symbolsandsynlighederne eller anden form for statistisk lovmæssighed, er dette ensbetydende med, at kilden kunne arbejde med færre symboler, hvis de alle var lige sandsynlige. Heraf fremgår den egentlige betydning af overbestemtheden, idet en overbestemthed altså udtrykker tilstedeværelsen af statistiske lovmæssigheder i kilden således, at *forholdet mellem overbestemtheden og de statistiske lovmæssigheder er proportionalt*. Den musikalske relevans af overbestemtheden kommer for dagen, når man erindrer, at summen af alle statistiske lovmæssigheder i en komposition udgør kompositionens stil (jfr. pg. 2), hvorfor overbestemtheden er et kvantitativt udtryk for den betydning, summen af de konstaterede stiltræk udøver i en musikalsk stilart.

10. Informationsenheden »bit« (der er en forkortelse af »binary diget«) er defineret som den mængde information, der er nødvendig for at vælge mellem to lige sandsynlige muligheder. Jfr. RezaI pg. 78.

Hidtil er udelukkende talt om selvinformationer af isolerede symboler og en kildes information pr. symbol forstået som middelværdien af disse selvinformationer. Heri ligger en væsentlig indskrænkning, da næsten alle informationskilder arbejder med symbolsekvenser snarere end med enkeltsymboler, og da det er åbenbart, at symbolsekvenserne kan være underkastet særlige statistiske lovmæssigheder af for eksempel æstetisk eller fysiologisk natur, der ikke behøver at fremgå af de isolerede symbolsandsynligheder. Således falder det straks i øjnene, at en konsonantfølge som »rhv« (*erhverv*) er naturlig på dansk, mens følgen »vhr« ikke forekommer i dansk skriftsprog.

For at komme til en realistisk vurdering af de statistiske lovmæssigheder, der findes i en kilde, må man derfor udover sandsynlighederne for de enkelte symboler beregne sandsynlighederne for symbolsekvenser af to, tre, fire og flere symbolers længde. Den praktiske fremgangsmåde er allerede skitseret (jfr. pg. 3), og beregningen af de til disse sandsynligheder svarende informationer for en kilde »med hukommelse« svarer – bortset fra visse matematiske komplikationer – ganske til den ovenfor antydede beregning af informationen af en kilde med enkeltsymboler, d. v. s. »uden hukommelse«¹¹. Da enhver form for statistisk lovmæssighed mellem symbolerne vil medføre en formindsket information af kilden og dermed en forøget overbestemthed, ledes man til at opstille begrebet »en kildes sande information«, hvorved forstås grænseværdien for den følge af informationsværdier, der fremkommer, når kildens information beregnes successivt for symbolsekvenser af 1, 2, 3, . . . n, . . . symbolers længde.

På lignende måde stiller sagen sig, hvør der er tale om en kilde, som udsender flere simultane symboler, der opfattes samlet af modtageren. Her må man forudse statistiske lovmæssigheder, der virker i det simultane plan, analogt med de lovmæssigheder, som konstateredes i det successive plan, og med samme informationsnedsættende virkning.

Der er således tale om tre forskellige former for statistisk lovmæssighed, der kan nedsætte en kildes informationsindhold og bevirke en overbestemthed: den uregelmæssige fordeling af kildens symboler, anvendelsen af symbolsekvenser og overensstemmelser mellem flere simultane symboler. I musikalsk sammenhæng ses disse tre arter af statistisk lovmæssighed at modsvare de »tonale« (forstået som en foretrukken anvendelse af visse skalatrin i modsætning til »atonale«), melodiske og akkordiske stiltræk. I det følgende skal demonstreres en informationsteoretisk musikanalyse, der bearbejder et musikalsk materiale med henblik på en kvantitativ vurdering af disse stiltræks betydning.



Under udvælgelsen af materialet har to synspunkter gjort sig gældende: For det første hensigtsmæssigheden af at kunne give de analytiske resultater en musi-

11. Jfr. RezaI kapitel 11.

kalsk interpretation; for det andet hensynet til de kvantitative krav, en hvilken som helst statistisk undersøgelse stiller.

Kravet om materialets størrelse har sin begrundelse i det faktum, at man overalt anvender de enkelte symbols relative hyppigheder i stedet for deres sandsynligheder, som ikke kan findes *a priori*. Den fejl, som herved begås, er afhængig af materialets størrelse, idet sandsynligheden for, at en hændelses relative hyppighed er identisk med dens sandsynlighed, vokser mod 1, når hændelsens absolutte hyppighed vokser mod uendeligt¹². Hensigtsmæssigheden af at kunne interpretere analysens resultater udspringer af et ønske om at se den informationsteoretiske analyse i forhold til den gængse musikalske stilanalyse og ønsket om at kunne benytte de gængse musikalske fagudtryk i videst muligt omfang. Dette ønske er en konsekvens af forfatterens opfattelse af informationsteorien som den naturlige videreførelse af de i almindelig musikalsk analyse anvendte statistiske kriterier og har dermed en subjektiv begrundelse, der ikke nødvendigvis indebærer en afvisning af den mulighed, der ligger i at give en informationsteoretisk analyse en ren statistisk interpretation.

For at imødekomme de hermed begrundede krav til analysematerialet bedst muligt er undersøgelsen bleven foretaget på tre værkgrupper, der omfatter mere end 500 noder pr. undersøgt stemme, og som dækker tre nogenlunde skarpt adskilte stilperioders løsning af samme musikalske opgave: den firestemmige koraludsættelse af 10 luthersk-evangeliske koralmelodier foretaget af H. L. Hassler, J. S. Bach og C. E. F. Weyse.

De undersøgte koraludsættelser er:

Hans Leo Hassler, *Kirchengesänge* 1612: nr. 3, 6, 9, 10, 34, 39, 40, 45, 50 og 52.

Johan Sebastian Bach, 371 *Vierstimmige Choralgesänge*, Edition Breitkopf nr. 10: nr. 158, 46, 125, 88, 20, 144, 7, 10, 4 og 100.

Christoph Ernst Friedrich Weyse, *Choral-Melodier etc.* 1839: nr. 17, 23, 7, 28, 132, 3, 84, 4, 29 og 2.

De i det følgende omtalte informationsteoretiske analyser er alle foretaget i sommeren 1964 på Danmarks tekniske Højskole, hvis GIER regnemaskine blev anvendt til alle større beregninger, idet cand. polyt. fru M. A. Larsen udførte det dermed forbundne arbejde som et eksamensprojekt, der er offentlig tilgængeligt på Laboratoriet for Kommunikationsteori¹³. Den teoretiske redegørelse for de nødvendige kodnings- og programmeringsprocesser ville sprænge rammerne for denne fremstilling, hvorfor her blot skal omtales, hvilke principper der har været lagt til grund for kodningen af nodematerialet.

12. Jakob Bernoulli: »De store tals lov«.

13. Eksamensprojekt 1964, Maria Alhed Larsen. Laboratoriet for Kommunikationsteori, Danmarks tekniske Højskole.

De 10 koraler i hver værkgruppe er transponeret til samme grundtone og betragtes som statistisk ligeberettigede kompositioner. Hver af de fire stemmer i koraludsættelserne er kodet som en selvstændig informationskilde, hvis symbol-repertoire udgøres af samtlige forskellige tonehøjder indeholdt i stemmens maksimale omfang plus pausen.

Denne fremgangsmåde er valgt fremfor en lettere metode, der kun opererer med et repertoire på 12 kromatiske halvtoner og derved anvender oktavforlægninger i kodningsprocessen, hvilket anses for uacceptabelt ved analyser af de her forekommende musikalske stilarter. Derudover indebærer metoden den fordel, at den bevarer typiske fænomener som enklang og stemmekryds, hvilket er betydningsfuldt for den senere interpretation af resultaterne. Af ulemper ved metoden må især nævnes to: Den stiller store krav til materialets omfang, og den kræver avancerede tekniske hjælpemidler, hvilket i det aktuelle tilfælde, hvor såvel tekniske hjælpemidler som materialets størrelse repræsenterer det praktisk mulige snarere end det teoretisk mest hensigtsmæssige, giver sig udslag i en mindre nøjagtighed af resultaterne.

Den analytiske fremgangsmåde har været følgende:

1. Beregning af hver stemmes information, idet der kun tages hensyn til fordelingen af tonehøjder og ikke regnes med nogen sammenhæng mellem tonerne.
2. Beregning af hver stemmes information under den forudsætning, at der eksisterer en sammenhæng mellem de enkelte toner, hvorfor det er nødvendigt at beregne informationen for tonegrupper af to, tre og flere toners længde i så stor udstrækning, som materialet tillader.
3. Beregning af den del af en stemmes information, som ikke er fælles med informationen af en eller flere samtidigt betragtede stemmer.
4. Beregning af overbestemtheder og sammenligning af resultaterne.

Ad 1.

Resultaterne af den første informationsberegning, der kun tager hensyn til fordelingen af tonehøjder i de forskellige stemmer, fremgår af fig. 1 a og b, hvor de 12 beregnede informationer er anført i grafisk form. Fig. 1 a viser informationerne af hver af de fire stemmekategorier sopran, alt, tenor og bas (herafter omtalt som H(S), H(A), H(T), H(B)) for de tre værkgrupper. Man bemærker, at mens H(S) hos Hassler og Bach er lige store, er Weyses H(S) som følge af hans »stive« koralstil en smule mindre end de to ældre komponisters. For de øvrige stemmers vedkommende ser man, at Hasslers understemmer har omtrent samme informationsniveau som hans overstemme, mens Bach og Weyse begge meddeler et stigende informationsindhold, jo længere man kommer ned i stemmekomplekset. Dette forhold forklares delvist af den tendens, der er hos Bach og Weyse til at øge stemmeomfanget af de dybere stemmer, og skyldes således både en repertoireforøgelse og en større tilfældighed i repertoirets anvendelse.

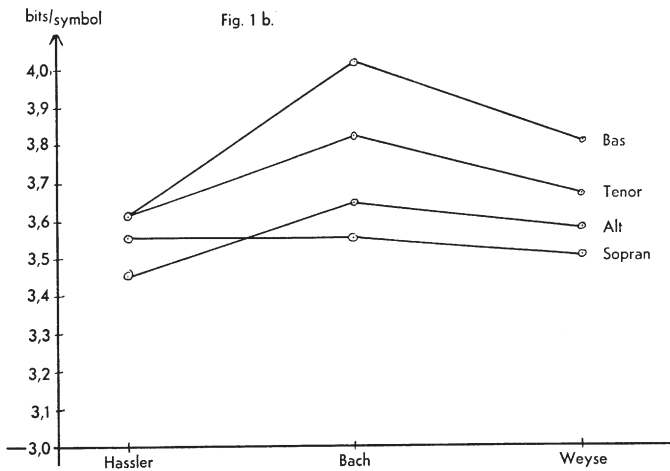
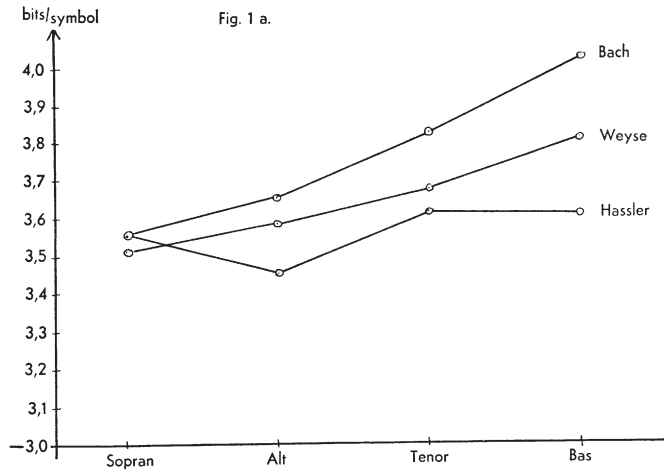
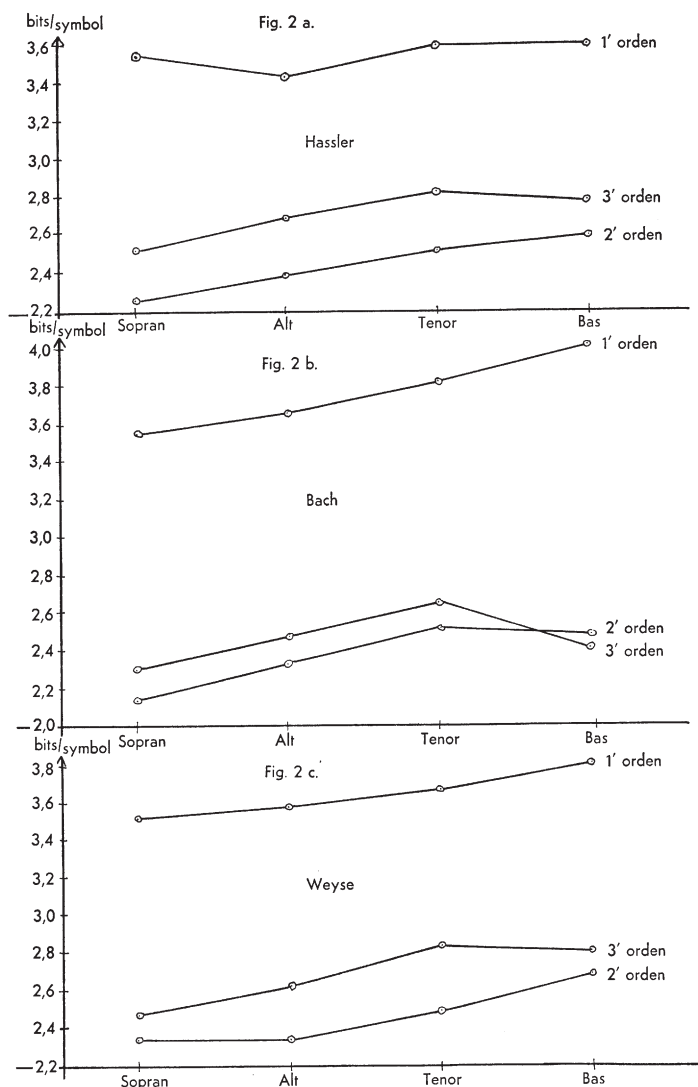


Fig. 1 b fremstiller de samme resultater som fig. 1 a, men opstillet efter de tre værkgrupper, hvorved antydes en direkte sammenhæng mellem de tre forskellige stilarter.

Ad 2.

Fig 2 a, b og c viser den informationsteoretiske konstatering af melodiformler i form af tonegrupper på to og tre toners længde. (Herefter omtalt som 2' og 3' orden¹⁴). Idet betydningen af melodiformlerne for en stemmes melodiske udformning kan aflæses direkte som afstanden mellem kurvepunkterne på 1' ordens kurven, der gentager fig. 1 a og altså kun tager hensyn til fordelingen af de enkelte tonehøjder, og de tilsvarende kurvepunkter på 2' og 3' ordens kur-

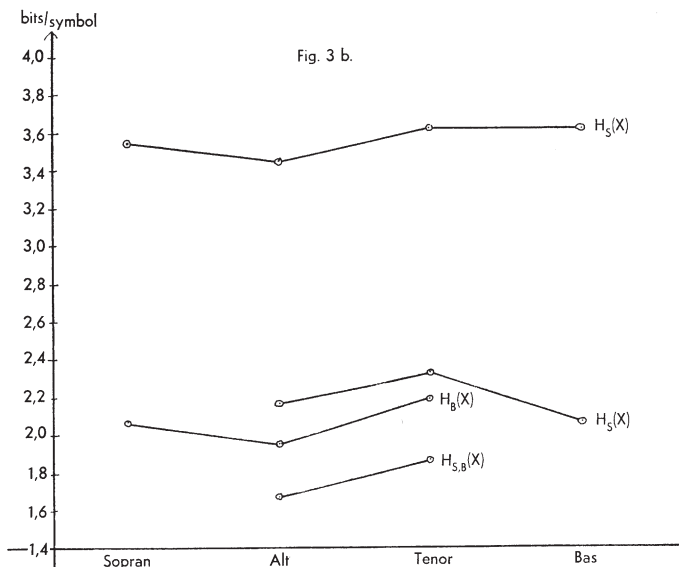
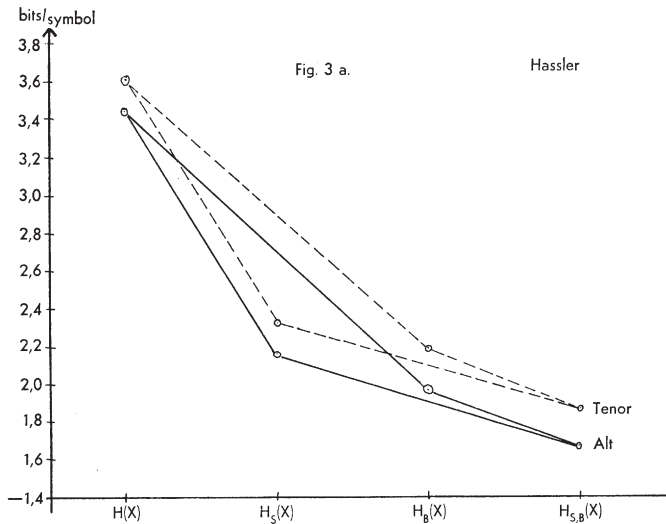
14. Jfr. Shannon Op. cit. pg. 388ff.



verne, bemærker man, at afstanden mellem 1' og 2' ordens kurverne er større hos Bach end hos Hassler og Weyse, hvilket må skyldes en mere udstrakt anvendelse af melodiformler i Bachs stemmer. Derudover ser man, at 1' og 2' ordens kurverne løber stort set parallelt for alle tre komponisters vedkommende, hvilket betyder den samme anvendelsesgrad af melodiformler i alle stemmer. Undtagelser herfra er dog sopranstemmen hos Hassler og basstemmen hos Bach, der begge viser større informationsfald end de pågældende komponisters øvrige stemmer.

3' ordens kurverne udviser alle den besynderlighed, at de ligger højere end 2' ordens kurverne. Dette forhold kan kun forklares af materialets ringe størrelse,

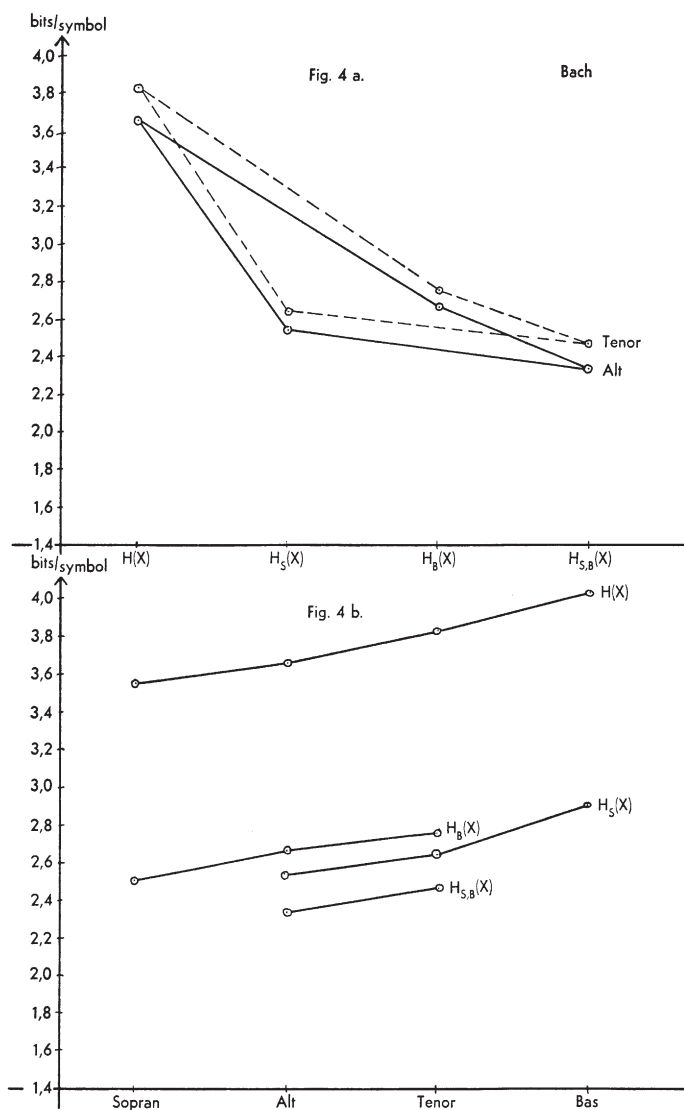
idet informationen af tre-toners grupperne aldrig kan blive større end informationen af to-toners grupperne, som jo er indeholdt i tre-toners grupperne. Da kravet til materialets størrelse vokser eksponentielt med længden af de undersøgte tonegrupper, er det klart, at materialet kan være tilfredsstillende stort til undersøgelser af enkelt-toner og to-toners grupper uden at være tilstrækkeligt til tre-toners grupper. Den undtagelse, som basstemmen hos Bach frembyder, kan således forklares med, at denne stemme dels indeholder det største antal noder af samtlige undersøgte, dels at den viser tendens til stærkere anvendelse af melodiformler end de øvrige stemmer.



Ad 3.

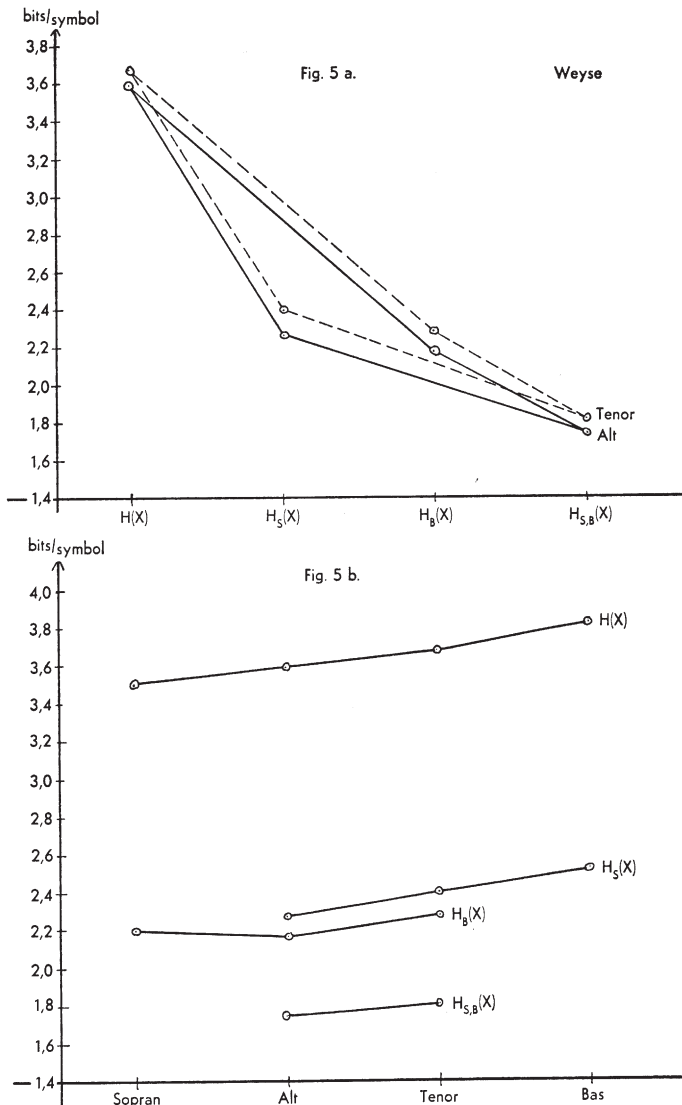
Beregningen af den del af en stemmes information, som ikke er fælles med informationen i en eller flere samtidigt betragtede stemmer, vil fremgå af kurvebladene fig. 3 a og b med Hasslers koraler, fig. 4 a og b med Bachs og fig. 5 a og b med Weyses.

Fig 3, 4 og 5 a viser informationerne af alt- og tenorstemmerne: Først hvor disse betragtes uafhængigt af de øvrige stemmer, $H(X)$; dernæst når de betragtes i sammenhæng med sopranen eller bassen, hvorved en del af deres information



viser sig at være identisk med sopran- eller basstemmernes, således at der kun måles den del af deres information, der er uafhængig af sopranen, $H_S(X)$, eller uafhængig af bassen, $H_B(X)$. Og endelig betragtes alt- og tenorstemmerne i sammenhæng med både sopran og bas, så man kun måler den del af deres information, der hverken forekommer i sopran eller bas, $H_{S,B}(X)$.

Den del af den betragtede stemmes information, der er fælles for stemmen og en af yderstemmerne, kaldes $I(S,X)$ eller $I(B,X)$ alt efter om stemmen ses i sammenhæng med sopran eller bas, mens den information, der er fælles for en mellemstemme og begge yderstemmer kaldes $I(S,B,X)$. Fællesinformationerne I

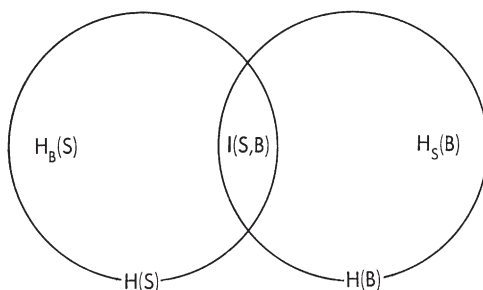


kan aflæses direkte af kurvelinjernes fald mellem de respektive kurvepunkter, og den høje grad af kongruens, der er mellem alt- og tenorkurverne hos alle tre komponister, viser, at det er berettiget at tale om mellemstemmer kontra yderstemmer, da tenor og alt influeres lige stærkt af yderstemmerne. Iøvrigt viser en sammenligning mellem de tre værkgrupper, at informationsfællesskabet mellem yder- og mellemstemmer er størst hos Weyse, lidt mindre hos Hassler og mindst hos Bach, hvilket kun kan forklares som en større samklangsmæssig frihed i Bachs stemmeføring. Dertil kommer den iagttagelse, at $I(B,X)$ er større end $I(S,X)$ hos Weyse og Hassler, hvorimod det omvendte er tilfældet hos Bach.

Fig 3, 4 og 5 b indeholder for mellemstemmernes vedkommende de samme resultater som fig. 3, 4 og 5 a, der blot analogt med fig. 2 er opført således, at fællesinformationerne mellem stemmerne kan aflæses af afstandene i samme lodrette plan, mens kurvelinjerne angiver den styrke, hvormed yderstemmerne influerer de øvrige stemmer. Foruden altens og tenorens informationsmængder er anført fire kurvepunkter, som ikke findes på fig. 3, 4 og 5 a: Nemlig sopranens information $H(S)$ og den del deraf, der ikke er fælles med bassens, $H_B(S)$; samt bassens information $H(B)$ og den del, den ikke har fælles med sopranen, $H_S(B)$.

Da det er sopranen, der er udgangspunkt for den betragtede kompositionsart, har det størst umiddelbar interesse at se på $H_S(B)$. Her viser det sig, at Hasslers basstemme kun har en information på ca. 2 bits pr. node, hvilket svarer til, at hver basnode er valgt mellem fire mulige (jfr. pg. 6), mens Bachs basstemme har informationen 2,9 bits pr. node, hvilket betyder, at hver basnode er valgt mellem 7 eller 8 mulige. (I begge tilfælde er set bort fra de indskrænkninger, den melodiske sammenhæng jfr. fig. 2 betyder).

Den interesse, der knytter sig til $H_B(S)$, er af mere teoretisk art, idet kendskabet til denne størrelse tillader en vurdering af resultaternes nøjagtighed:



På ovenstående Venndiagram er informationen af sopranen, $H(S)$ og af bassen $H(B)$ symboliseret af to cirkler, der skærer hinanden. Den information, der er fælles for sopran og bas, $I(S,B)$, symboliseres af det areal, de to cirkler har fælles, mens $H_B(S)$ udgør resten af sopran-cirklen og $H_S(B)$ resten af bas-cirklen. Ved en betragtning af figuren fremgår det umiddelbart, at:

$$H(S) - H_B(S) = I(S, B) = H(B) - H_S(B),$$

eller at

$$H(S) - H_B(S) = H(B) - H_S(B).$$

Indsættes de respektive tal i ligningerne, viser det sig, at udregningerne er gennemført med en fejl mindre end $\pm 0,02$ bits ¹⁵.

Ad 4.

Sammenligningen mellem de tre betragtede stilarter kan forme sig som en detaljeret gennemgang af de i fig. 1 til 5 anførte kurver, hvilket allerede er foretaget for nogle mere iøjnefaldende fænomeners vedkommende. Den direkte sammenligning af de målte informationer vanskeliggøres imidlertid af den omstændighed, at en stemmes information dels afhænger af dens omfang, dels afhænger af den tilfældighed, hvormed stemmens toner er anvendt (jfr. pg. 5). Man får derfor et bedre sammenligningsgrundlag, hvis man i stedet for informationerne anvender de dertil knyttede overbestemtheder, der (jfr. pg. 6) er uafhængige af stemmeomfang, hvilket tillader en direkte sammenligning mellem de forskellige værkgrupper.

Det skal her kort resumeres, at der til enhver informationskilde er knyttet en overbestemthed, R , der er defineret som

$$R = 1 - H/H_{\max},$$

hvor H er kildens beregnede information og $H_{\max}$ kildens maksimale information, der kun afhænger af det antal symboler, N , kilden råder over:

$$H_{\max} = \log_2 N.$$

I nærværende sammenhæng tjener det intet formål at anføre alle de overbestemtheder, der svarer til de foran fundne informationsmængder af de enkelte stemmer betragtet under forskellige synsvinkler. Derimod skal i det følgende demonstreres en fremgangsmåde, der kan føre til en vurdering af den samlede information og dermed overbestemtheden af en firestemmig koraludsættelse.

De under 2 og 3 udførte beregninger viser tydeligt, at den samlede information af en koraludsættelse må være mindre end summen af de under 1 beregnede informationsmængder af de enkelte stemmer, for dels nedsættes stemmernes information gennem den brug af melodiformler, som er konstateret under 2, dels viser beregningerne under 3, at en del af understemmernes information er identisk med overstemmens, ligesom en del af mellemstemmernes information findes i yderstemmerne, hvorfor der i den samtidige klingen af flere stemmer både er tale om informationsgentagelse og informationsforøgelse.

15. Denne nøjagtighed må af regnemæssige grunde gælde alle de fundne resultater undtagen 3' ordens resultaterne på fig. 2 og værdierne for $H_{S,B}(X)$ fig. 3 – 5. Nøjagtigheden af disse kan ikke vurderes ud fra det givne materiale, men den må antages at være mindre god end de øvrige resultaters.

For at kunne opnå et overblik over disse informationsnedsættende faktors betydning, skal der i det følgende beregnes tre overbestemtheder, R1, R2 og R3, hvoraf R1 angiver den overbestemthed, som skyldes den uregelmæssige fordeling af tonerne i alle fire stemmer (jfr. analysens afsnit 1); R2 er den overbestemthed, som skyldes anvendelsen af melodiformler i alle fire stemmer (jfr. analysens afsnit 2); mens R3 er den overbestemthed, som skyldes fællesinformationen mellem stemmerne (jfr. analysens afsnit 3).

Da samme Hmax indgår i alle tre udtryk for overbestemtheden, findes først Hmax for hver af de tre komponister:

	Hassler		Bach		Weyse	
	N	Hmax	N	Hmax	N	Hmax
sopran	20	4,32 bits	20	4,32 bits	20	4,32 bits
alt	23	4,52 –	22	4,46 –	18	4,17 –
tenor	23	4,52 –	24	4,58 –	22	4,46 –
bas	24	4,58 –	30	4,91 –	23	4,52 –
Hmax(S,A,T,B)		17,94 bits		18,27 bits		17,47 bits

For at finde R1 beregnes summerne af de under analysens afsnit 1 målte informationer af hver stemme:

	Hassler	Bach	Weyse
	H(X)	H(X)	H(X)
sopran	3,55 bits	3,55 bits	3,51 bits
alt	3,45 –	3,65 –	3,58 –
tenor	3,61 –	3,82 –	3,67 –
bas	3,61 –	4,02 –	3,81 –
ialt:	14,22 bits	15,04 bits	14,57 bits

De således fundne informationssummer indsættes i formelen for R sammen med værdierne for Hmax (S,A,T,B), hvorved R1 findes:

$$R1(\text{Hassler}) = 1 - 14,22/17,94 = 0,21$$

$$R1(\text{Bach}) = 1 - 15,04/18,27 = 0,18$$

$$R1(\text{Weyse}) = 1 - 14,57/17,47 = 0,11$$

For at finde R2 forsøger vi at beregne et H for hver komponist, der tager størst muligt hensyn til forekomsten af melodiformler i alle fire stemmer. Som nævnt pg. 12 f er de i fig. 2 anførte informationer imidlertid ikke identiske med stemmernes »sande« informationer, men øvre grænser derfor, idet materialet er for lille til en præcis vurdering af melodiformlernes betydning. Dertil kommer, at vi under beregningerne af melodiformlernes betydning ikke har kunnet tage hensyn til en eventuel melodisk sammenhæng mellem stemmerne, der vil medføre en mindre information af stemmekomplekset, end summen af de enkelte

stemmer udgør. Ved at addere informationerne fra fig. 2 finder vi altså en øvre grænse for H , mens det ikke er muligt at finde nogen nedre grænse:

	Hassler	Bach	Weyse
	$H(X)$	$H(X)$	$H(X)$
sopran	2,26 bits	2,13 bits	2,33 bits
alt	2,40 –	2,32 –	2,34 –
tenor	2,52 –	2,51 –	2,49 –
bas	2,60 –	2,42 –	2,69 –
ialt:	9,78 bits	9,38 bits	9,58 bits

Ved at indsætte disse summer som øvre grænser for H i formelen for overbestemtheden får vi de nedre grænser for $R2$:

$$R2(\text{Hassler}) > 1 - 9,78/17,94 = 0,45$$

$$R2(\text{Bach}) > 1 - 9,38/18,27 = 0,49$$

$$R2(\text{Weyse}) > 1 - 9,58/17,47 = 0,43$$

Da de tre værkgrupper er af omtrent samme omfang og er bearbejdet på samme måde, må de fundne værdier for $R2$ tilnærme de »sande« overbestemtheder lige godt, hvorfor man kan sammenligne dem indbyrdes. Deraf fremgår det direkte, hvor meget større rolle anvendelsen af melodiformler spiller for Bachs udformning af en koral-sats end for Hasslers og Weyses.

Beregningen af $R3$ tager sit udgangspunkt i de under analysens tredie afsnit udførte beregninger, der for hver komponist angiver den del af understemmernes information, der er uafhængig af overstemmen, samt den del af mellemstemmernes information, der er uafhængig af yderstemmernes.

Den samlede information af alle fire stemmer, $H(S,A,T,B)$ udgøres af hele sopranens information plus den del af bassens, som ikke gentager sopranens information, plus den del af altens information, som ikke gentager de to øvrige, plus endelig den del af tenorens information, som ikke gentager nogen af de andres.

$$H(S,A,T,B) = H(S) + H_S(B) + H_{S,B}(A) + H_{S,B,A}(T). \quad (1)$$

De tre første led på højre side af denne ligning kan aflæses direkte af fig. 3–5, idet vi her ser bort fra de unøjagtigheder, der er knyttet til udregningerne. Værre er det med $H_{S,B,A}(T)$, der ikke kan beregnes på grundlag af det givne materiale. Denne størrelse kan imidlertid vises at være lig med den kendte $H_{S,B}(T)$ minus fællesinformationen mellem alle fire stemmer:

$$H_{S,B,A}(T) = H_{S,B}(T) - I(S,A,T,B).$$

Herved omformes ligning (1) til:

$$H(S,A,T,B) = H(S) + H_S(B) + H_{S,B}(A) + H_{S,B}(T) - I(S,A,T,B)$$

Sidste led af denne ligning kan heller ikke beregnes af det givne materiale, men det kan vurderes ved hjælp af fællesinformationen mellem alt og tenor, der indeholder fællesinformationen mellem alt og tenor og de øvrige stemmer og derfor må være større end denne. Da fællesinformationen mellem alt og tenor, $I(A,T)$ kan findes af det givne materiale, når vi således til følgende vurdering:

$$\begin{aligned} H(S,A,T,B) &< H(S) + H_S(B) + H_{S,B}(A) + H_{S,B}(T) \quad \text{og} \\ H(S,A,T,B) &> H(S) + H_S(B) + H_{S,B}(A) + H_{S,B}(T) - I(A,T) \end{aligned}$$

Ved at indsætte de på fig. 3–5 anførte informationer samt den beregnede fællesinformation $I(A,T)$ kommer vi til følgende værdier for informationen af Hasslers, Bachs og Weyses koral:

$$\text{Hassler: } 7,90 < H(S,A,T,B) < 9,14 \text{ eller } H(S,A,T,B) \sim 8,50$$

$$\text{Bach: } 9,92 < H(S,A,T,B) < 11,25 \text{ eller } H(S,A,T,B) \sim 10,60$$

$$\text{Weyse: } 8,16 < H(S,A,T,B) < 9,59 \text{ eller } H(S,A,T,B) \sim 8,90.$$

Heraf følger ved indsættelse i formelen for overbestemthed værdierne af R3:

$$R3(\text{Hassler}) \sim 1 - 8,50/17,94 = 0,53$$

$$R3(\text{Bach}) \sim 1 - 10,60/18,27 = 0,42$$

$$R3(\text{Weyse}) \sim 1 - 8,90/17,47 = 0,49.$$

Det fremgår her direkte af de tre komponisters overbestemtheder, at Hassler og Weyse er stærkere influeret af samklangsmæssige hensyn end Bach, hvilket i forbindelse med den af R2 dragne konklusion må ses som et udtryk for den mere »polyfone«¹⁶ udformning, Bachs betragtede koraludsættelser har end Weyses og Hasslers.

For sluttelig at komme til et samlet udtryk for overbestemthederne af de tre komponisters koraludsættelser, må man holde sig for øje, at den overbestemthed, der skyldes den uregelmæssige anvendelse af tonerne, R1, som følge af de anvendte regnemetoder indgår i både R2 og R3. Hvis R2 og R3 antages iøvrigt at være uafhængige af hinanden, vil deres sum minus R1 derfor være et udtryk for komponistens bundethed af såvel tonale, melodiske som akkordmæssige hensyn, hvilket benævnes som overbestemtheden, R, af koraludsættelsen:

$$\text{Hassler: } R > R2 + R3 - R1 = 0,77$$

$$\text{Bach: } R > R2 + R3 - R1 = 0,73$$

$$\text{Weyse: } R > R2 + R3 - R1 = 0,81.$$

I disse udtryk er der set bort fra den kendte unøjagtighed af værdierne for R3

16. Anvendelsen af udtrykket »polyfon« indeholder her en væsentlig indskrænkning i forhold til den almindelige anvendelse af ordet, idet der i denne forbindelse ikke tages hensyn til værkernes rytmiske udformning. En vurdering af denne volder ingen principielle vanskeligheder, men er ikke gennemført på grund af den begrænsede tid, regnemaskinen har været til rådighed.

(Jfr. pg. 19), ligesom udtrykkene for R må blive nedre grænser, da R_2 er en nedre grænse og indgår i R med positivt fortegn. Man kan således ikke tillægge de fundne udtryk for R nogen absolut værdi, hvilket er en naturlig konsekvens af materialets størrelse såvel i forhold til de krav, statistiske undersøgelser stiller i almindelighed som i forhold til det ringe udsnit af de tre komponisters produktion, der er undersøgt. Imidlertid kan der henvises til de almindeligt citerede tal for overbestemthederne i tale- og skriftsprog, der varierer mellem 0,75 og 0,88, hvilket falder godt i tråd med de her fundne størrelser.

ENGLISH SUMMARY

After a brief mention of the spread of the information theory the present investigation attempts to illuminate the musical relevance of the information theory by describing a method of analysis, which is demonstrated on a musical material. As a background for the method of analysis are mentioned those sections of the information theory, which form a direct basis for this analysis.

The point of departure is the interpretation of a musical composition as a communication from the composer to a possible listener. The communication process thus indicated is characterized by the composer's choice of symbols; out of a repertory of tones he chooses those used in the composition. Since the composer's choice is an expression of the style of the composition, a musical style is defined as the sum of all statistical laws influencing the composer.

As an expression of these laws is used the probability of occurrence of the tones in a given composition as well as the probability of occurrence of groups of tones—consisting of one, two, three, or more tones—considering both groups of successive and simultaneous tones.

The information content of an occurrence is now defined as the negative logarithm with base two of the probability of the occurrence:

$$I(x) = -\log_2 p(x),$$

where $I(x)$ is the self information of the occurrence, and $p(x)$ its probability. This definition is extended to include all possible occurrences in a given repertory, the probabilities of which have the total sum 1, whereby the entropy of a source with the symbols $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ is defined as

$$H(X) = -\sum_{i=1}^n p(x_i) \cdot \log_2 p(x_i).$$

The connection between $H(X)$ for a given source and the maximum entropy, $H_{\max}$, of the source is expressed by the redundancy R , which is defined as

$$R = 1 - H/M_{\max}.$$

As the entropy of a source is dependent on the number of symbols in the source as well as on an uneven distribution of the probabilities of these symbols, while the maximum entropy depends only on the number of symbols in the source, we notice a proportionality between the redundancy and the statistical laws which make up the style of the composition—assuming that the style can be established from the composer's use of pitches and their combinations in melodic groups and chords.

The choice of the material analysed is motivated by 1) the appropriateness of being able to give a musical interpretation to the analytical results, and 2) the quantitative

requirements made by a statistical investigation. To meet these two demands in the best possible way the analysis treats ten four-part settings of Lutheran chorales by H. L. Hassler, J. S. Bach, and C. E. F. Weyse (Danish composer 1774–1842).

This material is analysed in the following way:

1. Calculation of the entropy of each part, considering only the distribution of pitches and not the connection between the tones. The results appear from fig. 1 a and 1 b.

2. Calculation of the entropy of each part, assuming that there exists a connection between the single tones, for which reason it is necessary to calculate the entropy for groups of two, three, and more tones to the extent which the material allows. The results appear from fig. 2 a, b, and c.

3. Calculation of that part of the entropy of a part which is not identical with the entropy of one or more simultaneously considered parts. The result appear from fig. 3, 4, and 5 a and b.

4. Calculation, for each composer's works, of the redundancy corresponding to the entropies R_1 , R_2 , and R_3 found under 1, 2 and 3.

Comparison of the redundancies found show that the textures of Hassler's and Weyse's chorales are considerably more influenced by harmonic regards than the chorales of Bach; on the other hand the textures of Bach chorales are more influenced by melodic considerations than those of Weyse and Hassler, a fact which is already indicated by fig. 1–5, but expressed directly by the values of R_1 – R_3 .

Finally we find one compound expression R for the redundancy of each of the three composers' chorales; this R turns out to be equivalent to the redundancy which is commonly indicated for speech and writing.